



Петров Юрий

Петров Ю., доктор технических наук, профессор кафедры Моделирования электроме- ханических и компьютерных сис- тем факультета Прикладной математики – процессов управ- ления С.-Петербургского Госу- дарственного Университета (СПбГУ).

- * Имеет более 140 научных трудов (в том числе, 15 моно- графий) в области автоматиче- ского управления и приклад- ной математики.
- * Член Международной эне- ргетической Академии.
- * Читает ряд учебных курсов по специальным дисциплинам.



Сизиков Валерий

Сергеевич В., доктор техниче- ских наук, профессор кафедры Измерительных технологий и компьютерной томографии С.-Петербургского Государст- венного Университета Инфор- мационных технологий, меха- ники и оптики (СПбГУ ИТМО).

- * Имеет более 120 научных трудов по прикладной матема- тике, томографии, астрофизике, обработке сигналов и изобре- жений.
- * Член Американского мате- матического общества. Соро- совский профессор.
- * Читает курсы: "Обратные прикладные задачи", "Матема- тические основы томографии", "Информатика".

Ю. П. ПЕТРОВ, В. С. СИЗИКОВ

Ю. П. ПЕТРОВ, В. С. СИЗИКОВ КОРРЕКТНЫЕ, НЕКОРРЕКТНЫЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИЛОЖЕНИЯМИ



Ю. П. ПЕТРОВ, В. С. СИЗИКОВ

КОРРЕКТНЫЕ, НЕКОРРЕКТНЫЕ И ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ЗАДАЧИ

ПРИЛОЖЕНИЯМИ

1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9
10	10	10
11	11	11
12	12	12
13	13	13
14	14	14
15	15	15
16	16	16
17	17	17
18	18	18
19	19	19
20	20	20
21	21	21
22	22	22
23	23	23
24	24	24
25	25	25
26	26	26
27	27	27
28	28	28
29	29	29
30	30	30
31	31	31
32	32	32
33	33	33
34	34	34
35	35	35
36	36	36
37	37	37
38	38	38
39	39	39
40	40	40
41	41	41
42	42	42
43	43	43
44	44	44
45	45	45
46	46	46
47	47	47
48	48	48
49	49	49
50	50	50
51	51	51
52	52	52
53	53	53
54	54	54
55	55	55
56	56	56
57	57	57
58	58	58
59	59	59
60	60	60
61	61	61
62	62	62
63	63	63
64	64	64
65	65	65
66	66	66
67	67	67
68	68	68
69	69	69
70	70	70
71	71	71
72	72	72
73	73	73
74	74	74
75	75	75
76	76	76
77	77	77
78	78	78
79	79	79
80	80	80
81	81	81
82	82	82
83	83	83
84	84	84
85	85	85
86	86	86
87	87	87
88	88	88
89	89	89
90	90	90
91	91	91
92	92	92
93	93	93
94	94	94
95	95	95
96	96	96
97	97	97
98	98	98
99	99	99
100	100	100
101	101	101
102	102	102
103	103	103
104	104	104
105	105	105
106	106	106
107	107	107
108	108	108
109	109	109
110	110	110
111	111	111

УДК 517.983.54: 519.6
ББК 22.19; 22.161.6
ПЗ0

Рецензент:
доктор физико-математических наук,
профессор Андриин А. С. (г. Иркутск, СЭИ СО РАН)

Одобрено на заседаниях кафедры Моделирования электромагнитических и компьютерных систем фак-та ПМ-ПУ СПбГУ и кафедры Измерительных технологий и компьютерной томографии фак-та ТМИТ СПбГИТМО(ТУ)

ПЗ0

Петров Ю. П., Сизиков В. С.

Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями: Учебное пособие для вузов. — СПб: Политехника, 2003. — 261 с.: ил.

ISBN 5-7325-0761-2

Изложены понятия корректных и некорректных задач, а также задач, промежуточных между корректными и некорректными. Приведены примеры подобных математических задач: системы линейных алгебраических уравнений, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, а также примеры прикладных задач из теории управления, обработки изображений и томографии. Показано, что преобразование уравнений, эквивалентные в классическом смысле, могут перевести корректное уравнение в некорректное и наоборот. Введено понятие преобразования, эквивалентных в расширенном смысле. Изложены устойчивые методы регуляризации Тихонова и решения на компакте. Приведены результаты решения численных примеров. Данная книга может рассматриваться как учебное пособие (повышенной трудности), так и монография.

Для студентов, магистров, аспирантов, преподавателей и научных сотрудников в области фундаментальной и прикладной математики.

УДК 517.983.54: 519.6
ББК 22.19; 22.161.6

ISBN 5-7325-0761-2

© Ю. П. Петров, В. С. Сизиков, 2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ.....	5
ПРЕДИСЛОВИЕ.....	6
ЧАСТЬ I. ТРИ КЛАССА ЗАДАЧ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ТЕХНИКИ	8

Глава 1. ПРОСТЕЙШИЕ НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ.....	8
1.1. Постановка проблемы. Примеры.....	8
1.2. Определения.....	12
1.3. Дальнейшие примеры и методы подхода к некорректным задачам.....	13
1.4. Некорректные задачи синтеза оптимальных систем управления.....	19
1.5. Некорректные задачи вычисления собственных значений систем линейных однородных уравнений.....	28
1.6. Решение систем дифференциальных уравнений. Всегда ли решения непрерывно зависят от параметров?.....	31
1.7. Заключение.....	39

Глава 2. КЛАСС ЗАДАЧ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ МЕЖДУ КОРРЕКТНЫМИ И НЕКОРРЕКТНЫМИ	41
---	-----------

2.1. Обнаружение третьего класса задач математики, физики и техники и его значение.....	41
2.2. Преобразование, эквивалентные в классическом смысле.....	42
2.3. Обнаружившиеся парадоксы.....	44
2.4. Преобразование, эквивалентные в расширенном смысле.....	46
2.5. Задачи, промежуточные между корректными и некорректными.....	49
2.6. Приложения к системам управления и другим объектам, описываемым дифференциальными уравнениями.....	54
2.7. Приложения к практике вычислений.....	62
2.8. Заключение по главам 1 и 2.....	67

Глава 3. ИЗМЕНЕНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ К ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ РАСЧЕТЕ СУДОВ И СИСТЕМ СУДОВОЙ АВТОМАТИКИ	70
---	-----------

3.1. Применение интегральных преобразований для решения практических задач.....	70
3.2. Свойства корреляционных функций.....	74
3.3. Свойства спектров.....	79
3.4. Корректность интегральных преобразований.....	83
3.5. Задачи, мало чувствительные к погрешностям спектров.....	87
3.6. Дифференцирование функций, отпущенных помехами.....	94
3.7. Предказание будущего.....	100

ЛИТЕРАТУРА к Части I	111
-----------------------------------	------------

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является учебным пособием для студентов, аспирантов и преподавателей вузов, а также монографией для научных сотрудников в области фундаментальной и прикладной математики, имеющих дело с решением алгебраических, дифференциальных, интегральных и операторных уравнений. Более конкретно, книга посвящена одной из важнейших проблем прикладной математики — исследованию и обеспечению устойчивости решений уравнений с учетом погрешностей исходных данных, параметров и коэффициентов математической модели исследуемого объекта, аппаратной функции, начальных условий и т.д., а также с учетом погрешностей вычислений, например, погрешностей округлений.

До последнего времени считалось, что все задачи математики, физики и техники достаточно поделить на два класса — *задачи корректные*, в которых малым погрешностям исходных данных соответствуют малые погрешности решений, и *задачи некорректные*, в которых малым погрешностям исходных данных соответствуют сколь угодно большие погрешности решений. Некорректные задачи требуют для своего решения специальных (устойчивых, регулярированных) методов, часть которых рассмотрена в настоящей книге. Однако целесообразно ввести также *третий класс задач*, которые можно назвать *промежуточными между корректными и некорректными*. Это — задачи, меняющие свою корректность в результате эквивалентных преобразований, а также задачи, являющиеся корректными или некорректными в зависимости от типов используемых функциональных пространств. С точки зрения приложений, задачи, меняющие свою корректность в результате эквивалентных преобразований, требуют к себе особо пристального внимания, так как их решение классическими методами может привести к грубым ошибкам в расчетах и тем самым стать причиной аварий и даже катастроф.

Книга состоит из двух частей, дополняющих друг друга.

В первой части рассматриваются общие свойства всех трех классов задач математики, физики и техники, а также подходы к их решению.

Во второй части изложен ряд устойчивых методов решения обратных некорректных (а также плохо обусловленных) задач, прилигнострированных численными примерами.

Текст и формулы данной книги набраны в редакторе Word97 (и Word2000) в виде структуры с главным документом (управляющим файлом) и вложенными документами (файлами списка сокращений,

предисловия, частей, глав, литературы, приложения и предметного указателя). Что касается рисунков, то для их построения были использованы графические редакторы StarNet, Pvbush, Word, Visual C++, MathCAD, PhotoShop, CorelDraw, а также FineReader, причем для построения рисунков 4.2–4.12, 5.18–5.20 были предварительно выполнены расчеты на языке MS Fortran 5 (и Fortran 90), а для построения рисунков 5.2–5.5, 5.7 и 5.8 — расчеты на Visual C++.

Разработан также электронный вариант данной книги в виде файла `ret&size.rtf` (с гипертекстовыми ссылками и другим сервисом) и помещен в Internet.

Авторы благодарят рецензента проф. А.С. Аларцина за просмотр рукописи и ценные замечания. Авторы благодарят И.А. Белова за помощь при оформлении структуры книги и за расчеты рисунков 5.2–5.5, 5.7, 5.8.

Первая часть книги и приложение написаны д.т.н., проф. СПбГУ Петровым Ю. П. (<http://www.ret.gov.1930.nagod.tz>, retgov1930@mail.ru), а вторая часть — д.т.н., проф. СПбГИТМО(ТУ) Сизиковым В. С. (<http://de.ifmo.ru/cups/svs.html>, sizikov2000@mail.ru).

Все пожелания и замечания по поводу данного учебного пособия — монографии авторы просят направлять по адресам: 190005, С-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, 15, кв. 11, Петрову Ю. П.; 197183 С-Петербург, ул. Сестрорецкая, 9, кв. 8, Сизикову В. С.; а также по e-mail или по факсу: 812-2335952.

ТРИ КЛАССА ЗАДАЧ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ТЕХНИКИ

Часть I

Глава 1

ПРОСТЕЙШИЕ НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

1.1. Постановка проблемы. Примеры

Необходимость исследования некорректных задач связана с одной из основных проблем прикладной математики — обеспечения надежных результатов вычислений при учете неизбежных погрешностей в задании коэффициентов и параметров математической модели, по которой производятся расчеты.

Действительно, коэффициенты математической модели, коэффициенты уравнений или системы уравнений, по которым производятся расчеты, получены, как правило, на основе измерений и поэтому имеют ограниченную точность. Кроме того, параметры реального процесса или технического объекта, который мы рассчитываем, не остаются идеально постоянными, они испытывают малые неконтролируемые изменения, вариации, точная величина которых обычно неизвестна.

Поэтому мы будем различать номинальные значения коэффициентов математической модели (будем обозначать их a_{in}) и реальные, истинные значения (обозначим их a_{ir}). Номинальные значения — это те, которые вводятся в вычислительную машину, участвуют во всех расчетах, а истинные, реальные значения a_{ir} неизвестны нам. Мы можем лишь утверждать, что эти неизвестные значения заключены в некоторых пределах, удовлетворяя неравенствам:

$$(1 - \varepsilon) a_{in} \leq a_{ir} \leq a_{in} (1 + \varepsilon), \quad (1.1)$$

где ε — числа, малые в сравнении с единицей. Их точные значения нам неизвестны; известны лишь их оценки.

Прозвишения $\pm \varepsilon \cdot a_{in}$ будем называть *вариациями* (или погрешностями) номинальных коэффициентов.

Поскольку все расчеты ведутся по номинальным коэффициентам (а реальные, истинные коэффициенты, как уже говорилось, нам неизвестны), то необходимо исследовать, как влияют вариации коэффициентов (а также вариации параметров, начальных условий, граничных

условий и т.д.) на точность наших расчетов.

Существуют задачи, в которых погрешности решений имеют тот же порядок, что и погрешности коэффициентов: это — наиболее легкий случай. Существуют задачи, где погрешности решений больше погрешности коэффициентов. Здесь нужно особенно тщательно следить за точностью, искать методы решения, уменьшающие погрешности.

Наконец, существуют задачи, где даже при сколь угодно малых, неизбежных на практике, погрешностях коэффициентов, параметров, начальных или граничных условий погрешности решения велики.

Такие задачи называются *некорректными* (точное определение дадим позже) и они особенно трудны для решения. Однако подобные задачи встречаются часто и методы подхода к ним необходимо изучать.

Начнем с простых примеров.

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя переменными x и y :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \quad (1.2)$$

Каждое уравнение является уравнением прямой на плоскости (x, y); решение системы (1.2), т.е. значения x и y , обращающие уравнения в тождества, являются координатами точки пересечения этих прямых. Согласно известным формулам Крамера, решения x, y выражаются через определители:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (1.3)$$

Так, для системы уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad (1.4)$$

определитель системы равен $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$, определитель

b_1 a_{12} $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3$, определитель a_{21} b_2 $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$. Система

имеет решение $x=1, y=1$.

Исследуем влияние вариации коэффициента при x в первом из уравнений (1.4) на погрешность решения.

Для системы

$$\begin{cases} (1+\varepsilon)x + 2y = 3, \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad (1.5)$$

решением будут числа $x = \frac{3}{3-\varepsilon}, y = \frac{3-3\varepsilon}{3-\varepsilon}$.

Если $|\varepsilon| \leq 0.01$, то

$$\begin{aligned} 0.996 \leq x \leq 1.0034, \\ 0.986 \leq y \leq 1.0034. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Мы убедились, что в данном случае малые погрешности в коэффициенте привели к малым погрешностям в решении. Однако существенно больше относительная погрешность решения существенно больше относительной погрешности коэффициентов. Такие системы называют часто «*мало обусловленными*» системами (точное определение мы дадим позже).

Так, например, для системы

$$\begin{cases} 1.1x + y = 1.1, \\ (1+\varepsilon)x + y = 1 \end{cases} \quad (1.7)$$

определитель равен

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.1 & 1 \\ 1+\varepsilon & 1 \end{vmatrix} = 0.1 - \varepsilon.$$

Система (1.7) имеет решение $x = \frac{1}{10-\varepsilon}, y = -\frac{11\varepsilon}{1-10\varepsilon}$ и

если $|\varepsilon| \leq 0.001$, то $0.99 \leq x \leq 1.01$,

если $|\varepsilon| \leq 0.01$, то $0.909 \leq x \leq 1.11$,

если $|\varepsilon| \leq 0.1$, то $0.5 \leq x \leq \infty$.

В данном примере погрешность решений x и y больше погрешности коэффициентов. Кроме того, она быстро возрастает с ростом ε и если $|\varepsilon| \leq 0.1$, то погрешность уже может быть сколь угодно велика.

В случае с системой (1.2) все достаточно очевидно: погрешности решений велики тогда, когда мал определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \quad (1.8)$$

Малость определителя (1.8) говорит о том, что прямые пересекаются друг с другом под очень малым углом и поэтому даже небольшая вариация коэффициента, изменяющая этот угол, приводит к большому изменению координат точки пересечения.

Рассмотрим теперь предельный случай, когда определитель (1.8)

при номинальных значениях коэффициентов равен нулю. В этом случае уже сколь угодно малые вариации коэффициентов могут привести к большому и даже к коренным изменениям решений.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x + y = b_1, \\ x + y = 1, \end{cases} \quad (1.9)$$

для которой

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Если $b_1 \neq 1$, то решений не существует (действительно, в этом случае прямые параллельны). Если же $b_1 = 1$, то решений много: в этом случае прямые совпадают и любая пара чисел $x = 1 - y$ является решением.

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{cases} (1+\varepsilon)x + y = b_1, \\ x + y = 1, \end{cases} \quad (1.10)$$

т.е. рассмотрим влияние на решение системы (1.9) вариации коэффициента a_{11} . Вычитая из первого уравнения второе, находим

$$\begin{aligned} x = \frac{b_1 - 1}{\varepsilon}, & \quad y = 1 - \frac{b_1 - 1}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Если $b_1 \neq 1$, то теперь для любого ε (даже сколь угодно малого) решение существует, но оно целиком зависит от неизвестной нам погрешности ε . Практического смысла это решение не имеет, хотя оно существует для любого $\varepsilon \neq 0$. Если же $b_1 = 1$, то в этом случае, также вычитая второе из уравнений (1.10) из первого, получим $\varepsilon \cdot x = 0$, откуда вытекает решение

$$x = 0, \quad y = 1, \quad (1.12)$$

справедливое для всех ε (в том числе и сколь угодно малых ε), кроме единственного значения $\varepsilon = 0$, которому соответствуют бесконечное множество решений (любая пара $x = 1 - y$ при $\varepsilon = 0$ является решением). Будет решение единственным, или решений будет много — зависит от неизвестного нам значения ε .

Поэтому решения системы (1.2) при определителе (1.8), равном нулю, сами по себе практического смысла не имеют.

Для вырожденных систем существует метод псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза [24, с.189], дающий единственное (но, вообще говоря, неустойчивое) решение, называемое нормальным решением.

1.2. Определения

Рассмотрев простейший пример, мы должны теперь определить, какие задачи считать корректными и какие — некорректными (или — как их еще называют — некорректно поставленными задачами).

Существует определение, приведенное в наиболее авторитетной книге о некорректных задачах — Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. «Методы решения некорректных задач» М., Наука, третье издание, 1986. (Первое издание было опубликовано в 1974 г., второе — в 1979.) Согласно [20], задача называется некорректной, если она не удовлетворяет хотя бы одному из трех условий:

1. Решение существует.
2. Решение единственно.
3. Сколь угодно малым вариациям коэффициентов, параметров, начальных или граничных условий соответствуют сколь угодно малые изменения решений.

Это определение не идеально (вряд ли все многочисленные задачи, не имеющие решений, т.е. не удовлетворяющие условию 1, целесообразно относить к некорректным), однако оно общепринято и мы будем его придерживаться.

Отметим, что из определения вариаций коэффициентов и параметров через неравенства (1.1) следует, что если номинальное значение коэффициента, т.е. значение a_n , равно нулю, то и вариация его равна нулю, т.е. «нуль не варьируется», нуль остается нулем. Это означает, что при анализе корректности мы рассматриваем только относительные вариации коэффициентов, а не абсолютные. Мы исключаем из рассмотрения те случаи, когда номинальное значение коэффициента равно нулю, а проварьированное значение стало сколь угодно малым, но не равным нулю. Такое ограничение необходимо, иначе очень широкой, почти необъятной круг задач незаслуженно попадет в некорректные. Так, например, уравнение $a_1x + a_0 = 0$ можно, естественно, рассматривать как уравнение $0 \cdot x^2 + a_1x + a_0 = 0$, т.е. как уравнение $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, в котором коэффициент $a_2 = 0$. Если после вариации он примет значение $a_2 = \varepsilon$, то уже при сколь угодно малых ε уравнение будет иметь два корня, не близких друг к другу, и мы задачу нахождения корней полинома $a_1x + a_0 = 0$ и вообще любого полинома

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

должны были бы отнести к некорректным задачам, что совершенно нецелесообразно.

Отказавшись от рассмотрения «вариаций нуля», мы выведем из

круга некорректных задач многочисленные так называемые «сингулярно-возмущенные» системы дифференциальных уравнений, т.е. системы с малыми параметрами при старших производных — типа уравнения

$$\varepsilon \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 = 0$$

и ему подобных. Это — интересные задачи, но к некорректным они не относятся. Если даже ε — сколь угодно малая величина, то она (разумеется, только условно говоря) «в бесконечно большое число раз» больше, чем точный нуль. Поэтому переход от точного нуля к $\varepsilon \neq 0$ не следует считать вариацией нулевого коэффициента, малым изменением его.

Мы убедимся далее, что и при отказе от «вариаций нуля» некорректных задач все равно остается очень много.

1.3. Дальнейшие примеры и методы подхода к некорректным задачам

К некорректным задачам относятся очень широкий круг задач на максимумы и минимумы (экстремальные задачи).

Пример. Какова минимальная длина изгороди, необходимая для плотного, без щелей, огораживания участка земли площадью s^2 ?

На первый взгляд задача совсем проста: известно, что минимум длины изгороди достигается в том случае, если огораживаемый участок имеет форму круга с периметром $p = 2\pi R$ (где R — радиус круга) и площадью $s = \pi R^2$. Исключая R , получим $p_{\min} = \sqrt{4\pi} \cdot \sqrt{s}$.

Однако площадь s не может быть измерена идеально точно. Если истинная площадь больше номинальной s_n , хотя бы на малую величину Δs , то изгородь длиной $p_{\min} = \sqrt{4\pi} \cdot \sqrt{s_n}$ не удастся замкнуть, задача огораживания решена не будет. Мы убеждаемся, что рассматриваемая задача, как и впрочем любая задача об элементе, доставляющем минимум — является задачей некорректной. При сколь угодно малой погрешности в условии решение может исчезнуть.

На этом простом примере удобно разъяснить общий подход к решению некорректных задач: задачу некорректную, не имеющую по этому практического смысла, надо заменить на близкую к ней задачу корректную.

В данном случае корректная задача такова: если площадь земельного участка s_n известна с погрешностью, не превышающей Δs , то какой запас длины изгороди Δp следует прибавить к минимальной длине p_{\min} для того, чтобы задача огораживания была всегда выпол-

