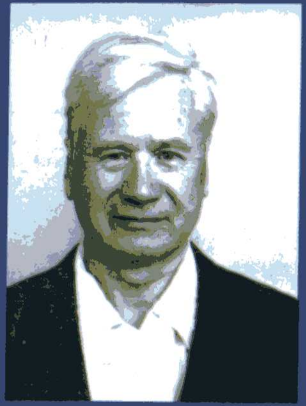


Петров Юрий Петрович, доктор технических наук, профессор кафедры Моделирования электромеханических и компьютерных систем факультета Прикладной математики – процессов управления С.-Петербургского Государственного Университета (СПбГУ).

* Имеет более 140 научных трудов (в том числе, 15 монографий) в области автоматического управления и прикладной математики.
* Член Международной энергетической Академии.
* Читает ряд учебных курсов по специальным дисциплинам.

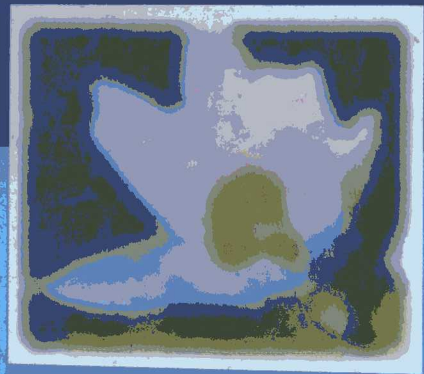
Сизиков Валерий Сергеевич, доктор технических наук, профессор кафедры Измерительных технологий и компьютерной томографии С.-Петербургского Государственного Университета Информационных технологий, механики и оптики (СПбГУ ИТМО).

* Имеет более 120 научных трудов по прикладной математике, томографии, астрофизике, обработке сигналов и изображений.
* Член Американского математического общества. Соросовский профессор.
* Читает курсы: "Обратные прикладные задачи", "Математические основы томографии", "Информатика".

Ю. П. ПЕТРОВ, В. С. СИЗИКОВ

Ю. П. ПЕТРОВ, В. С. СИЗИКОВ

КОРРЕКТНЫЕ, НЕКОРРЕКТНЫЕ И ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ЗАДАЧИ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ



ВУЗ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ВУЗОВ

Ю. П. ПЕТРОВ, В. С. СИЗИКОВ

КОРРЕКТНЫЕ, НЕКОРРЕКТНЫЕ и ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ЗАДАЧИ с ПРИЛОЖЕНИЯМИ

Рекомендовано УМО по оптическому
и приборостроительному образованию
в качестве учебного пособия
при изучении дисциплин:
"Теория управления",
"Обработка изображений",
"Основы томографии",
"Высшая математика",
"Прикладная математика"

ПОЛИТЕХНИКА
ИЗДАТЕЛЬСТВО
Санкт-Петербург 2003

УДК 517.983.54; 519.6
ББК 22.19; 22.161.6
П30

Рецензент:
доктор физико-математических наук,
профессор Апарцин А. С. (г. Иркутск, СЭИ СО РАН)

Одобрено на заседаниях кафедры Моделирования электромеханических и компьютерных систем фак-та ПМ–ПУ СПбГУ и кафедры Измерительных технологий и компьютерной томографии фак-та ТМиТ СПбГИТМО(ТУ)

Петров Ю. П., Сизиков В. С.

П30 Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями: Учебное пособие для вузов. — СПб: Политехника, 2003. — 261 с.: ил.

ISBN 5-7325-0761-2

Изложены понятия корректных и некорректных задач, а также задач, промежуточных между корректными и некорректными. Приведены примеры подобных математических задач: системы линейных алгебраических уравнений, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, а также примеры прикладных задач из теории управления, обработки изображений и томографии. Показано, что преобразования уравнений, эквивалентные в классическом смысле, могут переводить корректное уравнение в некорректное и наоборот. Введено понятие преобразований, эквивалентных в расширенном смысле. Изложены устойчивые методы регуляризации Тихонова и решения на компакте. Приведены результаты решения численных примеров. Данная книга может рассматриваться как учебное пособие (повышенной трудности), так и монография.

Для студентов, магистров, аспирантов, преподавателей и научных сотрудников в области фундаментальной и прикладной математики.

УДК 517.983.54; 519.6
ББК 22.19; 22.161.6

ISBN 5-7325-0761-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

БПФ — быстрое преобразование Фурье
ДПФ — дискретное преобразование Фурье
КТХ — космический телескоп «Хаббл»
МНК — метод наименьших квадратов (Гаусса)
МПОМ — метод псевдообратной матрицы (Мура–Пенроуза)
НПФ — непрерывное преобразование Фурье
ОДУ — обыкновенное дифференциальное уравнение
ОПФ — обратное преобразование Фурье
ПФ — преобразование Фурье
ПХ — преобразование Хартли
РА — регуляризирующий алгоритм
РО — регуляризирующий оператор
РТ — рентгеновская томография
СЛАУ — система линейных алгебраических уравнений
ЧХ — частотная характеристика (спектрометра)
ЯМР — ядерный магнитный резонанс

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является учебным пособием для студентов, аспирантов и преподавателей вузов, а также монографией для научных сотрудников в области фундаментальной и прикладной математики, имеющих дело с решением алгебраических, дифференциальных, интегральных и операторных уравнений. Более конкретно, книга посвящена одной из важнейших проблем прикладной математики – исследованию и обеспечению устойчивости решений уравнений с учетом погрешностей исходных данных, параметров и коэффициентов математической модели исследуемого объекта, аппаратной функции, начальных условий и т.д., а также с учетом погрешностей вычислений, например, погрешностей округлений.

До последнего времени считалось, что все задачи математики, физики и техники достаточно поделить на два класса – *задачи корректные*, в которых малым погрешностям исходных данных соответствуют малые погрешности решений, и *задачи некорректные*, в которых малым погрешностям исходных данных соответствуют сколь угодно большие погрешности решений. Некорректные задачи требуют для своего решения специальных (устойчивых, регулярных) методов, часть которых рассмотрена в настоящей книге. Однако целесообразно ввести также *третий класс задач*, которые можно назвать *промежуточными между корректными и некорректными*. Это – задачи, меняющие свою корректность в результате эквивалентных преобразований, а также задачи, являющиеся корректными или некорректными в зависимости от типов используемых функциональных пространств. С точки зрения приложений, задачи, меняющие свою корректность в результате эквивалентных преобразований, требуют к себе особо пристального внимания, так как их решение классическими методами может привести к грубым ошибкам в расчетах и тем самым стать причиной аварий и даже катастроф.

Книга состоит из двух частей, дополняющих друг друга.

В первой части рассматриваются общие свойства всех трех классов задач математики, физики и техники, а также подходы к их решению.

Во второй части изложен ряд устойчивых методов решения обратных некорректных (а также плохо обусловленных) задач, проиллюстрированный численными примерами.

Текст и формулы данной книги набраны в редакторе Word97 (и Word2000) в виде структуры с главным документом (управляющим файлом) и вложенными документами (файлами списка сокращений,

предисловия, частей, глав, литературы, приложения и предметного указателя). Что касается рисунков, то для их построения были использованы графические редакторы Grapher, PBbrush, Word, Visual C++, MathCAD, PhotoShop, CorelDraw, а также FineReader, причем для построения рисунков 4.2–4.12, 5.18–5.20 были предварительно выполнены расчеты на языке MS Fortran 5 (и Fortran 90), а для построения рисунков 5.2–5.5, 5.7 и 5.8 – расчеты на Visual C++.

Разработан также электронный вариант данной книги в виде файла pet&siz.pdf (с гипертекстовыми ссылками и другим сервисом) и помещен в Internet.

Авторы благодарят рецензента проф. А.С. Апарцина за просмотр рукописи и ценные замечания. Авторы благодарят И.А. Белова за помощь при оформлении структуры книги и за расчеты рисунков 5.2–5.5, 5.7, 5.8.

Первая часть книги и приложение написаны д.т.н., проф. СПбГУ Петровым Ю. П. (http://www.petrov1930.narod.ru, petrov1930@mail.ru), а вторая часть – д.т.н., проф. СПбГИТМО(ТУ) Сизиковым В. С. (http://de.ifmo.ru/curs/svs.html, sizikov2000@mail.ru).

Все пожелания и замечания по поводу данного учебного пособия–монографии авторы просят направлять по адресам: 190005, С-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, 15, кв. 11, Петрову Ю. П.; 197183 С-Петербург, ул. Сестрорецкая, 9, кв. 8, Сизикову В. С.; а также по e-mail или по факсу: 812-2335952.

Часть I
ТРИ КЛАССА ЗАДАЧ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ТЕХНИКИ

Глава 1
ПРОСТЕЙШИЕ НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

1.1. Постановка проблемы. Примеры

Необходимость исследования некорректных задач связана с одной из основных проблем прикладной математики – обеспечения надежных результатов вычислений при учете неизбежных погрешностей в задании коэффициентов и параметров математической модели, по которой производятся расчеты.

Действительно, коэффициенты математической модели, коэффициенты уравнений или системы уравнений, по которым производятся расчеты, получены, как правило, на основе измерений и поэтому имеют ограниченную точность. Кроме того, параметры реального процесса или технического объекта, который мы рассчитываем, не остаются идеально постоянными, они испытывают малые неконтролируемые изменения, вариации, точная величина которых обычно неизвестна.

Поэтому мы будем различать номинальные значения коэффициентов математической модели (будем обозначать их $a_{i\text{н}}$) и реальные, истинные значения (обозначим их $a_{i\text{р}}$). Номинальные значения – это те, которые вводятся в вычислительную машину, участвуют во всех расчетах, а истинные, реальные значения $a_{i\text{р}}$ неизвестны нам. Мы можем лишь утверждать, что эти неизвестные значения заключены в некоторых пределах, удовлетворяя неравенствам:

$$(1-\varepsilon)\,a_{i\text{н}} \le a_{i\text{р}} \le a_{i\text{н}}\,(1+\varepsilon), \tag{1.1}$$

где ε – числа, малые в сравнении с единицей. Их точные значения нам неизвестны; известны лишь их оценки.

Произведения $\pm\,\varepsilon \cdot a_{i\text{н}}$ будем называть *вариациями* (или погрешностями) номинальных коэффициентов.

Поскольку все расчеты ведутся по номинальным коэффициентам (а реальные, истинные коэффициенты, как уже говорилось, нам неизвестны), то необходимо исследовать, как влияют вариации коэффициентов (а также вариации параметров, начальных условий, граничных

условий и т.д.) на точность наших расчетов.

Существуют задачи, в которых погрешности решений имеют тот же порядок, что и погрешности коэффициентов: это – наиболее легкий случай. Существуют задачи, где погрешности решений больше погрешности коэффициентов. Здесь нужно особенно тщательно следить за точностью, искать методы решения, уменьшающие погрешности.

Наконец, существуют задачи, где даже при сколь угодно малых, неизбежных на практике, погрешностях коэффициентов, параметров, начальных или граничных условий погрешности решения велики.

Такие задачи называют *некорректными* (точное определение дадим позже) и они особенно трудны для решения. Однако подобные задачи встречаются часто и методы подхода к ним необходимо изучать.

Начнем с простых п р и м е р о в.

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя переменными x и y:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \tag{1.2}$$

Каждое уравнение является уравнением прямой на плоскости (x, y); решение системы (1.2), т.е. значения x и y, обращающие уравнения в тождества, являются координатами точки пересечения этих прямых. Согласно известным формулам Крамера, решения x, y выражаются через определители:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.3}$$

Так, для системы уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x + y = 3 \end{cases} \tag{1.4}$$

определитель системы равен $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$, определитель $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3$, определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$. Система имеет решение x=1, y=1.

Исследуем влияние вариации коэффициента при x в первом из уравнений (1.4) на погрешность решения.

Для системы

$$\begin{cases}(1+\varepsilon)x+2y=3,\\ 2x+y=3\end{cases} \tag{1.5}$$

решением будут числа $x=\dfrac{3}{3-\varepsilon}$, $y=\dfrac{3-3\varepsilon}{3-\varepsilon}$.

Если $|\varepsilon|\le 0.01$, то

$$\begin{aligned}0.996 \le x \le 1.0034,\\ 0.986 \le y \le 1.0034.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Мы убедились, что в данном случае малые погрешности в коэффициенте привели к малым погрешностям в решении. Однако существуют системы, в которых относительная погрешность решения существенно больше относительной погрешности коэффициентов. Такие системы называют часто *«плохо обусловленными»* системами (точное определение мы дадим позже).

Так, например, для системы

$$\begin{cases}1.1x+y=1.1,\\ (1+\varepsilon)x+y=1\end{cases} \tag{1.7}$$

определитель равен

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1.1 & 1\\ 1+\varepsilon & 1\end{vmatrix}=0.1-\varepsilon.$$

Система (1.7) имеет решение $x=\dfrac{1}{10-\varepsilon}$, $y=-\dfrac{11\varepsilon}{1-10\varepsilon}$ и

если $|\varepsilon|\le 0.001$, то $0.99\le x\le 1.01$,

если $|\varepsilon|\le 0.01$, то $0.909\le x\le 1.11$,

если $|\varepsilon|\le 0.1$, то $0.5\le x\le\infty$.

В данном примере погрешность решений x и y больше погрешности коэффициентов. Кроме того, она быстро возрастает с ростом ε и если $|\varepsilon|\le 0.1$, то погрешность уже может быть сколь угодно велика.

В случае с системой (1.2) все достаточно очевидно: погрешности решений велики тогда, когда мал определитель

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}. \tag{1.8}$$

Малость определителя (1.8) говорит о том, что прямые пересекаются друг с другом под очень малым углом и поэтому даже небольшая вариация коэффициента, изменяющая этот угол, приводит к большому изменению координат точки пересечения.

Рассмотрим теперь предельный случай, когда определитель (1.8)

при номинальных значениях коэффициентов равен нулю. В этом случае уже сколь угодно малые вариации коэффициентов могут привести к большим и даже к коренным изменениям решений.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases}x+y=b_1,\\ x+y=1,\end{cases} \tag{1.9}$$

для которой

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Если $b_1\neq 1$, то решений не существует (действительно, в этом случае прямые параллельны). Если же $b_1=1$, то решений много: в этом случае прямые совпадают и любая пара чисел $x=1-y$ является решением.

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{cases}(1+\varepsilon)x+y=b_1,\\ x+y=1,\end{cases} \tag{1.10}$$

т.е. рассмотрим влияние на решение системы (1.9) вариации коэффициента a_{11}. Вычитая из первого уравнения второе, находим

$$x=\frac{b_1-1}{\varepsilon}, \qquad y=1-\frac{b_1-1}{\varepsilon}. \tag{1.11}$$

Если $b_1\neq 1$, то теперь для любого ε (даже сколь угодно малого) решение существует, но оно целиком зависит от неизвестной нам погрешности ε. Практического смысла это решение не имеет, хотя оно существует для любого $\varepsilon\neq 0$. Если же $b_1=1$, то в этом случае, также вычитая второе из уравнений (1.10) из первого, получим $\varepsilon\cdot x=0$, откуда вытекает решение

$$x=0, \quad y=1, \tag{1.12}$$

справедливое для всех ε (в том числе и сколь угодно малых ε), кроме единственного значения $\varepsilon=0$, которому соответствуют бесконечное множество решений (любая пара $x=1-y$ при $\varepsilon=0$ является решением). Будет решение единственным, или решений будет много – зависит от неизвестного нам значения ε.

Поэтому решения системы (1.2) при определителе (1.8), равном нулю, сами по себе практического смысла не имеют.

Для вырожденных систем существует метод псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза [24, с.189], дающий единственное (но, вообще говоря, неустойчивое) решение, называемое нормальным решением.

1.2. Определения

Рассмотрев простейший пример, мы должны теперь определить, какие задачи считать корректными и какие – некорректными (или – как их еще называют – некорректно поставленными задачами).

Существует определение, приведенное в наиболее авторитетной книге о некорректных задачах – Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. «Методы решения некорректных задач» М., Наука, третье издание, 1986. (Первое издание было опубликовано в 1974 г., второе – в 1979.) Согласно [20], задача называется некорректной, если она не удовлетворяет хотя бы одному из трех условий:

1. Решение существует.
2. Решение единственно.
3. Сколь угодно малым вариациям коэффициентов, параметров, начальных или граничных условий соответствуют сколь угодно малые изменения решений.

Это определение не идеально (вряд ли все многочисленные задачи, не имеющие решений, т.е. не удовлетворяющие условию 1, целесообразно относить к некорректным), однако оно общепринято и мы будем его придерживаться.

Отметим, что из определения вариаций коэффициентов и параметров через неравенства (1.1) следует, что если номинальное значение коэффициента, т.е. значение $a_{i\text{н}}$, равно нулю, то и вариация его равна нулю, т.е. «нуль не варьируется», нуль остается нулем. Это означает, что при анализе корректности мы рассматриваем только относительные вариации коэффициентов, а не абсолютные. Мы исключаем из рассмотрения те случаи, когда номинальное значение коэффициента равно нулю, а проварьированное значение стало сколь угодно малым, но не равным нулю. Такое ограничение необходимо, иначе очень широкий, почти необъятный круг задач незаслуженно попадет в некорректные. Так, например, уравнение $a_1x + a_0 = 0$ можно, естественно, рассматривать как уравнение $0 \cdot x^2 + a_1x + a_0 = 0$, т.е. как уравнение $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, в котором коэффициент $a_2 = 0$. Если после вариации он примет значение $a_2 = \varepsilon$, то уже при сколь угодно малых ε уравнение будет иметь два корня, не близких друг к другу, и мы задачу нахождения корней полинома $a_1x + a_0 = 0$ и вообще любого полинома

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

должны были бы отнести к некорректным задачам, что совершенно нецелесообразно.

Отказавшись от рассмотрения «вариаций нуля», мы выводим из

круга некорректных задач многочисленные так называемые «сингулярно-возмущенные» системы дифференциальных уравнений, т.е. системы с малыми параметрами при старших производных – типа уравнения

$$\varepsilon\,\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 = 0$$

и ему подобных. Это – интересные задачи, но к некорректным они не относятся. Если даже ε – сколь угодно малая величина, то она (разумеется, только условно говоря) «в бесконечно большое число раз» больше, чем точный нуль. Поэтому переход от точного нуля к $\varepsilon \neq 0$ не следует считать вариацией нулевого коэффициента, малым изменением его.

Мы убедимся далее, что и при отказе от «вариаций нуля» некорректных задач все равно остается очень много.

1.3. Дальнейшие примеры и методы подхода к некорректным задачам

К некорректным задачам относится очень широкий круг задач на максимумы и минимумы (экстремальные задачи).

Пример. Какова минимальная длина изгороди, необходимая для плотного, без щелей, огораживания участка земли площадью s?

На первый взгляд задача совсем проста: известно, что минимум длины изгороди достигается в том случае, если огораживаемый участок имеет форму круга с периметром $p = 2\pi R$ (где R – радиус круга) и площадью $s = \pi R^2$. Исключая R, получим $p_{\min} = \sqrt{4\pi} \cdot \sqrt{s}$.

Однако площадь s не может быть измерена идеально точно. Если истинная площадь больше номинальной s_n хотя бы на малую величину Δs, то изгородь длиной $p_{\min} = \sqrt{4\pi} \cdot \sqrt{s_n}$ не удастся замкнуть, задача огораживания решена не будет. Мы убеждаемся, что рассматриваемая задача, как и впрочем любая задача об элементе, доставляющем минимум – является задачей некорректной. При сколь угодно малой погрешности в условии решение может исчезнуть.

На этом простом примере удобно разъяснить общий подход к решению некорректных задач: задачу некорректную, не имеющую поэтому практического смысла, надо заменить на близкую к ней задачу корректную.

В данном случае корректная задача такова: если площадь земельного участка s_n известна с погрешностью, не превышающей Δs, то какой запас длины изгороди Δp следует прибавить к минимальной длине $p_{\min}$ для того, чтобы задача огораживания была всегда выполнима? Из условия $p_{\min} + \Delta p = \sqrt{4\pi} \cdot \sqrt{s_n + \Delta s}$ сразу находим $\Delta p = \sqrt{4\pi} \cdot (\sqrt{s_n + \Delta s} - \sqrt{s_n})$.

Поскольку погрешность Δs может быть различной, равной $\Delta_i s$, то полученная формула дает нам для каждого $\Delta_i s$ последовательность корректных задач, имеющих смысл. В пределе, при $\Delta s \to 0$ получаем предельное, уже не имеющее практического смысла, решение исходной некорректной задачи.

Рассмотренный простой пример дает понятие о простейшем случае так называемой регуляризации некорректной задачи: исходную некорректную задачу, не имеющую практического смысла, мы заменяем на последовательность корректных задач с некоторым параметром, предельное значение которого соответствует исходной некорректной задаче. В данном простейшем случае этот параметр равен Δs. В дальнейшем будут рассмотрены другие методы регуляризации.

Так же, как и в рассмотренном примере, некорректность будет возникать в любой задаче на экстремум, точнее, в задаче о вычислении того элемента, на котором будет достигаться минимум некоторой функции, функционала и т.п. Сколь угодно малые изменения в условии приведут к тому, что найденного минимального элемента (в нашем примере – длины изгороди $p_{\min} = \sqrt{4\pi} \cdot \sqrt{s_n}$) уже не хватит. Задача потеряет смысл, что и свидетельствует о ее некорректности.

Однако, поскольку для всех задач об элементе, доставляющем экстремум, причина некорректности ясна и очевидна, то их издавна решали «с запасом», не оговаривая специально, что, например, в задаче о длине изгороди нужно за искомое условие брать не номинальное значение площади s_n, а максимально возможное, т.е. брать $s = s_n + \Delta s$, где Δs – максимально возможная погрешность в измерении и задании s. Ввиду простоты подхода к решению, экстремальные задачи издавна успешно решали без выделения их в особый класс некорректных задач. Этот класс был выделен французским математиком Жаком Адамаром (1865 – 1963) в 1902 г. Адамар привел пример задачи теплопроводности, в которой сколь угодно малая ошибка в задании граничного условия приводит к большой ошибке в решении. Однако пример Адамара относился к довольно сложной математической модели, описываемой дифференциальными уравнениями с частными производными. Достаточно сложны были и примеры, рассматриваемые позже в известном учебнике [20], книгах [6], [10], [21] и т.п.

Поэтому у студентов, инженеров и научных работников – у всех лиц, ведущих математические расчеты, часто возникает мнение, что

некорректные задачи – это нечто, относящееся к очень «высокой» математике, относящееся к сложным и редко встречающимся задачам.

На самом деле это не так. Некорректные задачи встречаются часто, на каждом шагу, и о свойствах некорректных задач, об опасности ошибок, с ними связанных, надо всегда помнить. Развитие представлений о некорректных задачах изложено в книге [18].

Мы уже упоминали, что некорректными являются все те многочисленные задачи на экстремум, в которых нужно найти элемент, реализующий экстремум.

К некорректным относятся и задачи на вычисление корней полиномов, если эти корни кратные, а физический смысл имеют лишь вещественные решения.

Рассмотрим простейший полином второй степени:

$$x^2 + 2x + 1.$$

Любой студент скажет, что этот полином имеет двухкратный корень $x_1 = x_2 = -1$ и вычислить его можно по элементарной формуле:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1.$$

Однако если коэффициент при последнем члене полинома равен не точно единице, а $1+\varepsilon$, что всегда возможно, поскольку все коэффициенты известны лишь с ограниченной точностью, то вещественное решение при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ сразу исчезает, в этом случае

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-(1+\varepsilon)} = -1 \pm \sqrt{-\varepsilon}.$$

Если нас интересуют только вещественные решения, то уже при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ решение исчезает. Задача вычисления вещественных кратных корней некорректна.

Некорректны многие краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - x = 0 \qquad (1.13)$$

с краевыми условиями: $x(t=0) = 0$, $x(t=a) = b$. Уравнение (3.13) имеет общее решение

$$x = c_1 \sin t + c_2 \cos t,$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования (действительно, функции $c_1 \sin t$ и $c_2 \cos t$, как легко проверить, удовлетворяют уравнению (3.13); поэтому удовлетворяет ему и их линейная комбинация). Из первого краевого условия находим, что $c_2 = 0$. Из второго краевого условия $x(t=a)=b$ находим, что $c_1 = \dfrac{b}{\sin a}$. Таким образом, заданным краевым условиям удовлетворяет решение

$$x_1(t) = \frac{b}{\sin a} \cdot \sin t .$$

Однако, если краевое условие относится не к точке $t = a$, а к точке $t = a + \varepsilon$ (что вполне возможно, поскольку малые погрешности в краевых условиях неизбежны), то на самом деле решение имеет вид

$$x_2(t) = \frac{b}{\sin(a+\varepsilon)} \cdot \sin t .$$

Если, например, $a = \pi - \varepsilon$, то модуль разности между $x_1(t)$ и $x_2(t)$ может быть сколь угодно велик даже для сколь угодно малых ε.

Таким образом, мы убеждаемся, что некорректных задач очень много.

Отметим, что в отличие от краевой задачи, задача Коши для одного дифференциального уравнения любого порядка корректна. Однако в системах дифференциальных уравнений недавно открыты интересные явления изменения корректности, о которых мы расскажем в главе второй.

Подходы к решению некорректных задач покажем на примере задачи определения места корабля по пеленгам. Если берег виден, то судоводитель измеряет углы между направлением на север и направлениями на два маяка A и B, отмеченные на карте. Затем он прочерчивает карандашом на карте эти направления (пеленги). Место корабля находится на пересечении двух пеленгов (рис. 1.1). Таким образом, судоводитель решает графически, решает построением, систему двух линейных уравнений – типа уравнений (1.2).

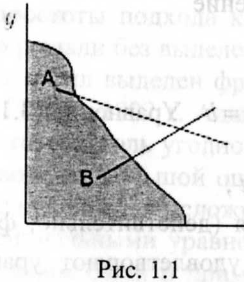


Рис. 1.1

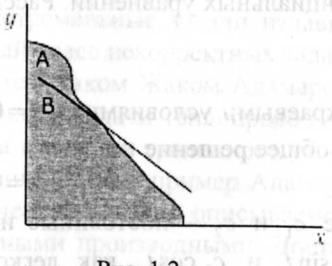


Рис. 1.2

Разумеется, углы измеряются с конечной точностью, проведение линии на карте тоже не обходится без погрешности, поэтому место корабля определяется приближенно, но обычно с достаточной для су-

доводителя точностью.

Если два маяка расположены близко друг от друга, то направления на них близки, карандашные линии будут пересекаться под очень острым углом, а могут и вообще в пределах точности чертежа слиться в одну прямую, как это показано на рис. 1.2.

Рассмотрим именно этот случай – случай, когда судоводителю приходится решать некорректную задачу, например, задачу решения системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 1, \end{cases} \tag{1.14}$$

определитель которой равен нулю и которая, поэтому, фактически сводится к одному уравнению

$$x + y = 1.$$

Место корабля по двум совпадающим линиям (с уравнениями $x + y = 1$ и $x + y = 1$), естественно, не определить – оно может быть любым на линии $x + y = 1$. Этого и следовало ожидать, поскольку сама по себе некорректная задача как таковая практического смысла не имеет.

Однако некорректную задачу можно различными способами регуляризировать.

Вот один из способов (кстати, довольно широко рекомендуемый): ищут не любое решение системы (1.14), а решение с наименьшей нормой. (Этот метод, дающий решение с минимальной нормой; называемое еще нормальным решением, рассмотрен более подробно в [24], стр. 179 и 189). Одна из возможных норм – это сумма квадратов переменных x и y. Приходим к задаче: найти значения x и y, доставляющие минимум норме:

$$F = x^2 + y^2$$

при условии, что x и y связаны уравнениями (1.14), или (что то же самое) связаны уравнением $x + y = 1$.

Учитывая, что из этого уравнения следует $x = 1 - y$, приведем норму к виду $F = (1-y)^2 + y^2$ и взяв производную $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ сразу устанавливаем, что минимум нормы будет достигаться в точке $x = 0.5$, $y = 0.5$.

Таким образом, введя норму $F = x^2 + y^2$ мы перешли от некорректной задачи к корректной (нетрудно проверить, что при малых вариациях коэффициентов системы (1.14) решение $x = 0.5$, $y = 0.5$ изменится мало).

Однако для интересующей нас практической задачи определения